MA’RUZA

FUNKSIYANING MONOTONLIGI VA UNING EKSTRIMUMLARI

Mavzuning rejasi

1. Funksiyaning monotonligi.
2. Funksiyaning ekstremumi.

Tayanch so’z va iboralar: monoton funksiya, munoton o’suvchi, monoton kamayuvchi, doimiy funksiya, maksimum, minimum, ekstremum, local ekstremum, local minimum, eng katta, eng kichik.

1. Funksiyaning monotonligi

1.1. Umumiy tushunchalar

$y = f(x)$, $x \in D$ funksiya berilgan bo’lsin.

<u>Ta’rif:</u> *$y = f(x)$ funksiya $H \subset D$ sohada monoton o’suvchi deyiladi, agar $\forall\, x_1, x_2 \in H$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ va monoton kamayuvchi deyiladi, agar $\forall x_1, x_2 \in H$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.*

Bunday funksiyalar ba’zan, jiddiy o’suvchi va jiddiy kamayuvchi deyiladi. Agar $x_1 < x_2 \in H$ shartdan faqat $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) kelib chiqsa, u holda funksiya H to’plamda kamaymovchi (o’smovchi) yoki soddagina o’suvchi (kamayuvchi) deyiladi. Doimiy funksiya bir vaqtning o’zida kamaymovchi, ham o’smovchi bo’ladi.

1.2. FUNKSIYANING DOIMIYLIK (KRITERIYASI) ALOMATI

Differensiallanuvchi funksiya $]a,b[$ oraliqda doimiy bo’lishi uchun $f'(x) \equiv 0$ bo’lishi zarur va kifoyadir.

<u>Zaruriyligi:</u> $f(x) = const$ deb faraz qilaylik $\Rightarrow f'(x) = 0$

<u>Kifoyaligi:</u> $\forall\, x \in]a, b[$ uchun $f'(x) = 0$ bo’lsin. x_0 nuqtani belgilab olamiz, bu holda $\forall x$, $x_0 \in]a, b[$ uchun Lagranj teoremasi shartlari bajariladi. Demak, $\exists\, c \in [x_0, x]$: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ bo’ladi. Biroq, farazimizga binoan $f'(c) = 0$, ya’ni $f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) = const$. Teorema to’liq isbot bo’ldi.

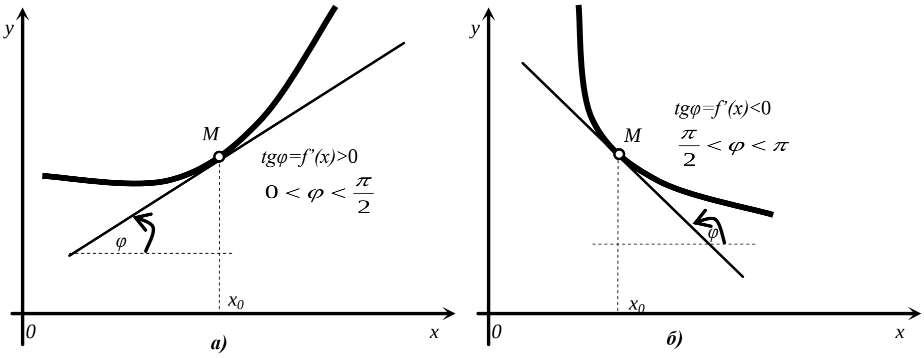
1.3. FUNKSIYANING MONOTONLIK ALOMATI

$f(x)$ funksiya biror $]a,b[$ oraliqda differensiallanuvchi va uning chegara nuqtalarida uzluksiz bo’lsin. $f(x)$ funksiya $]a, b[$ oraliqda monoton o’suvchi (kamayuvchi) bo’lishi uchun $\forall x \in]a, b[$ da $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) bo’lishi shart.

<u>Isboti:</u> Funksiya o’suvchi bo’lgan holni qaraymiz. $f'(x) > 0$ shart berilgan. Lagranj teoremasini $\forall [x_1, x_2] \subset]a, b[$ ga qo’llaymiz: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $c \in]x_1, x_2[$. $f'(c) > 0$ shartga binoan, $x_2 - x_1 > 0$. Demak, $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Bu esa $x_2 > x_1$ da $f(x_2) > f(x_1)$, ya’ni $f(x)$ o’suvchi demakdir.

Teoremaning ikkinchi qismini isbotlash o’quvchiga havola qilinadi. Alomatning geometrik tasviri ***8-shakl***da.



8-SHAKL

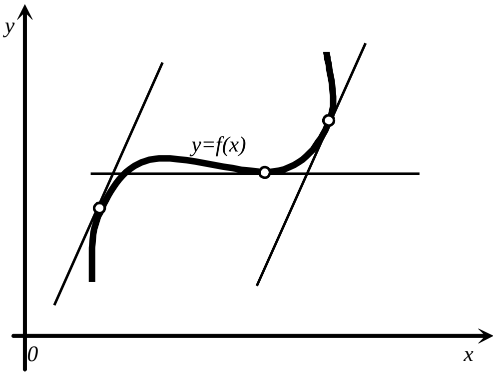
Biror oraliqda kamaymovchi (o'smovchi) funksiya uchun shu oraliqda $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) *bo'lishi zarur va yetarli shart* (***9-shakl***).

Bu holda, funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma ba'zi nuqtalarda *Ox* o'qiga parallel bo'ladi.

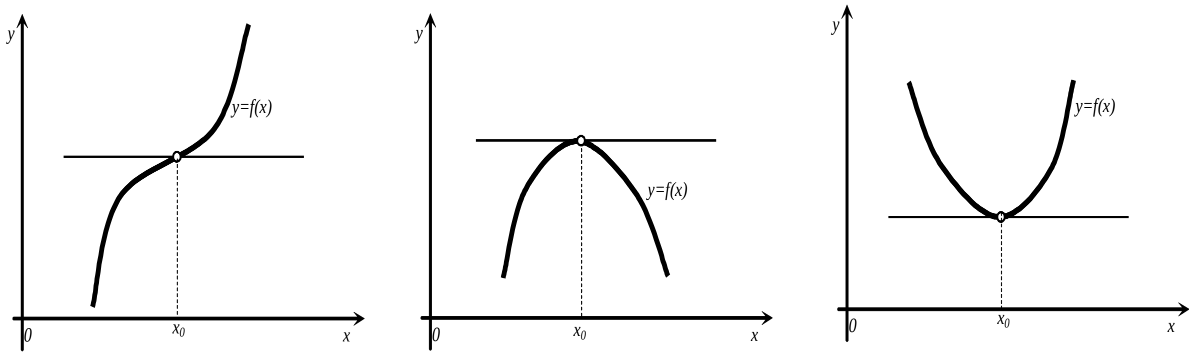
Agar $f'(x_0)=0$ *bo'lsa, u holda* x_0 *nuqta* $f(x)$ *funksiyaning stasionar nuqtasi deyiladi.*

Stasionar nuqtalarga funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma *Ox* o'qga parallel bo'lgan nuqtalar tug'ri keladi. Yuqorida o'rnatilgan alomat har bir nostasionar nuqtada funksiya o'zgarishini aniqlashga imkon beradi.

Funksiyaning stasionar nuqtadagi, hamda uning hosilaga ega bo'lmagan nuqtadagi xarakteri alohida o'rganiladi. Funksiya grafigining stasionar nuqta atrofidagi mumkin bo'lgan ko'rinishi ***10-shakl***da keltirilgan.



9-shakl



10-SHAKL

2. FUNKSIYANING EKSTREMUMI

2.1. ASOSIY TUSHUNCHALAR

f(x) funksiya x_0 *nuqtada* $f(x_0)$ *maksimumga ega deyiladi, agar bu nuqtaning biror atrofida* ($x\neq x_0$ *da*)

$f(x)< f(x_0)$ (1) *tengsizlik bajarilsa;*

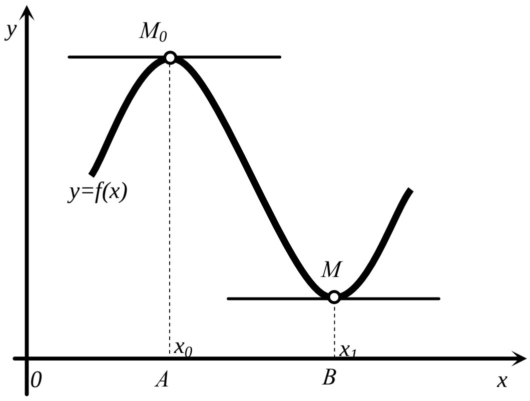
$f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada* $f(x_0)$ *minimumga ega deyiladi, agar bu nuqtaning biror atrofida* ($x\neq x_0$ *da*)

$f(x) > f(x_0)$ (2) *tengsizlik bajarilsa.*

Shunday qilib, funksiyaning o'zgarishi x_0 nuqta atrofida qaraladi va (1) shart bajarilganda funksiya x_0 nuqtada ***lokal (maxalliy) maksimum***ga, va (2) shart bajarilganda ***lokal minimum***ga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum va minimumlari funksiyaning ekstremumlari deyiladi. Funksiya maksimum yoki minimumga erishgan nuqta, funksiyaning ekstremum nuqtasi deyiladi.

Masalan, grafigi 11- shaklda berilgan $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f(x_0)=AM_0$ maksimumga, x_1 nuqtada $f(x_1)=BM$ minimumga ega.



11-SHAKL

2.2. Ekstremumning zaruriy sharti

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremum (maksimum yoki minimum)ga ega bo'lsin. Agar funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, bu holda $f'(x_0)=0$ bo'lishi zarurdir.

Haqiqatan ham, agar $f'(x_0)\neq 0$ deb faraz qilinsa, u holda x_0 nuqtada: $f'(x)>0$ bo'lsa funksiya o'suvchi, $f'(x_0)<0$ bo'lsa funksiya kamayuvchi bo'lar edi.

1-misol

$f(x) = x^2,\ x\in]-\infty; +\infty[$.

$f'(x) = 2x,\ f'(0) = 0.\ x= 0$ nuqtaning atrofida ($x\neq 0$ bo'lganda) $f(x) > f(0)$, tengsizlik bajariladi, demak, $f(0)= 0$ berilgan funksiyaning minimumi. (***12-shakl***).

2-misol

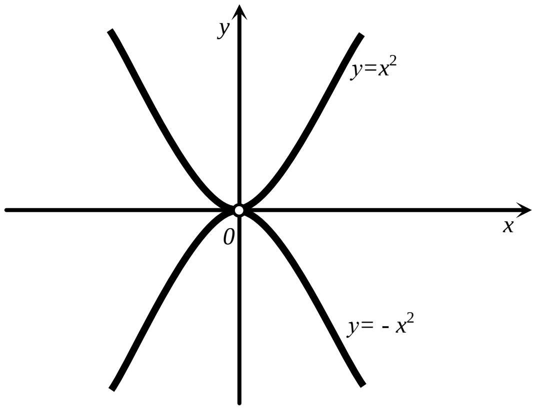
$f(x) = -x^2,\ x\in]-\infty; +\infty[$

$f'(x) = -2x,\ f'(0) = 0.\ x = 0$ nuqta ($x\neq 0$ bo'lganda) atrofida $f(x)< f(0)$, demak, $f(0) = 0$ berilgan funksiyaning maksimumi. (***12-shakl***).

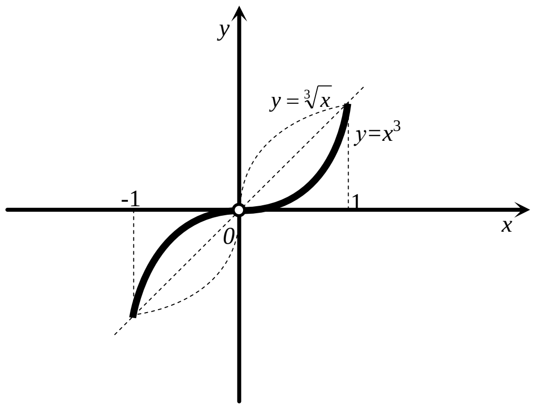
3-misol

$f(x)= -x^3,\ x\in]-\infty; +\infty[$ funksiya uchun $f'(0) = 3x^2\big|_{x=0}$ biroq $x= 0$ nuqta atrofida (1) yoki (2) tengsizliklar bajarilmaydi. Demak $x = 0$ nuqtada ekstremum yo'q (***13-shakl***).

Izoh: Qaralgan nuqtalardan $x = 0$ stasionar nuqta, hamda bu nuqtada funksiya uzluksiz.
Endi quyidagi misollarni qaraymiz.



12-shakl



13-shakl

4-misol

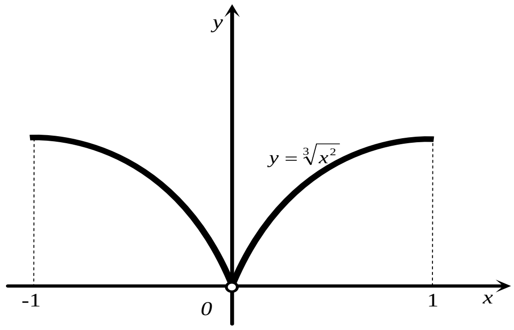
$f(x)=\sqrt[3]{x}, \quad x\in\left]-\infty;+\infty\right[=D(f)$

$f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow \quad f'(0)=+\infty$, $x=0$ nuqta atrofida (1) va (2) tengsizlik bajaril-maydi. Demak $x=0$ nuqtada ekstremum yuk (***13-shakl***).

5-misol

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}, \quad D(f)=\left]-\infty;+\infty\right[$

$f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f'(0)=\infty$, $x=0$ nuqtaning atrofida ($x\neq 0$ da) $f(x)>f(0)$ demak, $x=0$ nuqtada funksiya $f(0)=0$ ga teng bo'lgan minimumga ega (***14-shakl***).



14-shakl

6-misol

$f(x)=|x|, \quad D(f)=\left]-\infty;+\infty\right[$

$f'(0)$ hosila mavjud emas. Biroq $x=0$ nuqta atrofida ($x\neq 0$) $f(x)>f(0)$, ya'ni $x=0$ da funksiya $f(0)=0$ ga teng minimumga ega.

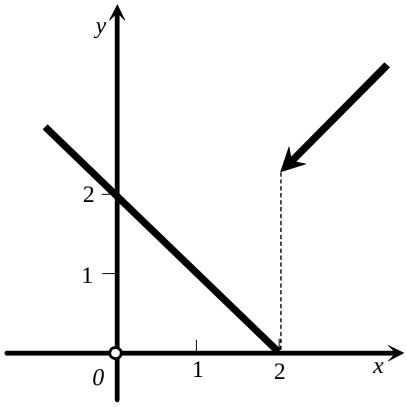
4-6 misollarda qaralgan funksiyalar uzluksiz, biroq 4,5 misollarda funksiya hosilasi cheksizga teng. Ammo 1-misolda ekstremum yo'q, 5-da funksiya ekstremumga ega, 6-misolda esa funksiya hosila mavjud bulmagan nuqtada ekstremumga ega.

Demak, funksiya na faqat stasionar nuqtada, balki hosila cheksiz bo'lgan va mavjud bo'lmagan nuqtada ham ekstremumga ega bo'lishi mumkin ekan.

7-misol

$$f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\leq 2 \quad \partial a \\ 2x-1, & x>2 \quad \partial a \end{cases}$$

$f'(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 2 \quad \partial a \\ 2, & x > 2 \quad \partial a \end{cases}$, $x = 2$ nuqtada funksiya uzilishga ega (chekli uzilish) (***15-shakl***). $f(2) = (2-x)\big|_{x=2} = 0$, x = 2 nuqta atrofida ($x \neq 2$ da) f (x) > f (2), demak x = 2 nuqtada funksiya f (2) = 0 ga teng minimumga ega.



15-shakl

Shunday qilib, 7- misol ko'rsatadiki, funksiya uzilishga ega bo'lgan nuqtalarda ham ekstremumga ega bo'lishi mumkin ekan. Bundan keyin ekstremumni funksiyaning uzluksizlik nuqtalarida izlaymiz. Uzilish nuqtalarida ekstremumga tekshirish alohida izlanishlar o'tkazishni talab qiladi.

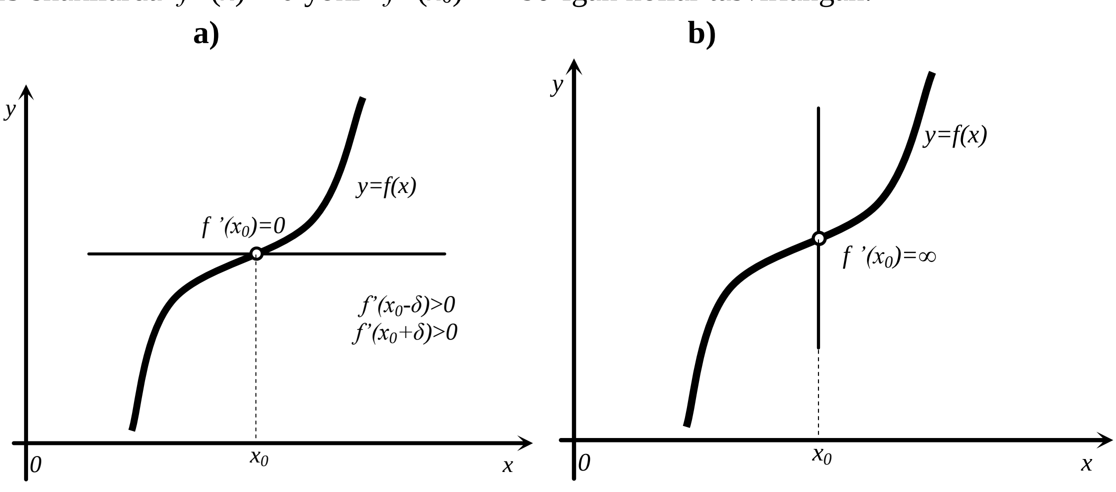
Demak, funksiyaning ekstremumini funksiya hosilasi yoki nolga teng, yoki cheksiz, yoki umuman mavjud bo'lmagan nuqtalarda izlash kerak. Bu nuqtalar *kritik nuqtalar* deyiladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, agar x_0 nuqta kritik nuqta bo'lsa, bu holda funksiya grafigiga $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma Ox o'qiga ($f'(x) = 0$) yoki Oy o'qiga ($f'(x_0)=\infty$) parallel bo'ladi, yoki mavjud emas.

2.3. Funksiyani birinchi hosila bo'yicha tekshirish (ekstremumning birinchi yetarli sharti)

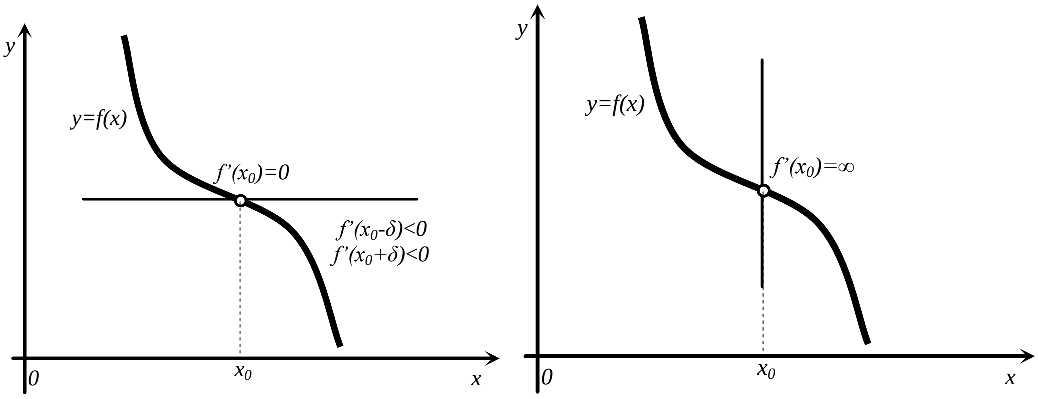
$f(x)$ funksiyani qaraymiz: x_0 - funksiyaning kritik nuqtasi; $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va x_0 nuqtaning atrofida differensiallanuvchi (x_0 bundan xoli bo'lishi mumkin), undan tashqari, $f'(x)$ x_0 ning chap tomonida ham o'ng tomonida ham aniq ishoraga ega bo'lsin.

16-19 shakllarda $f'(x) = 0$ yoki $f'(x_0)=\infty$ bo'lgan hollar tasvirlangan.



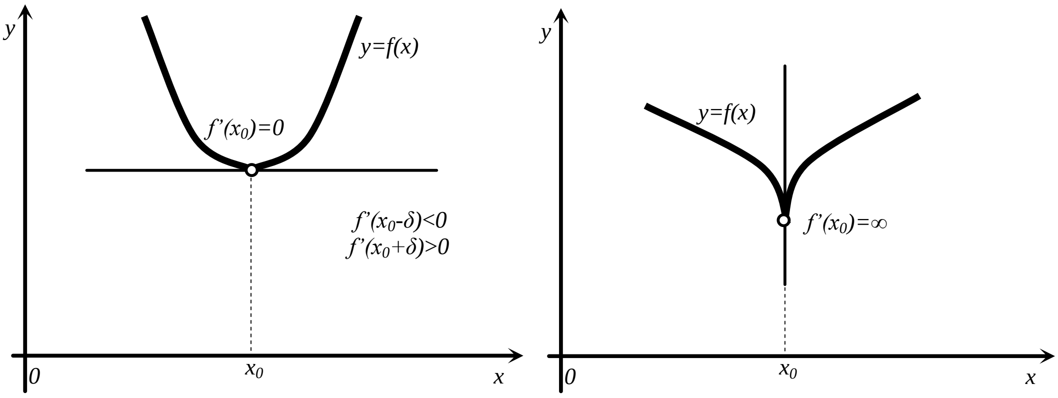
$f(X)$ FUNKSIYA X_0 NUQTADA O'SADI. ***16-SHAKL***

A) B)



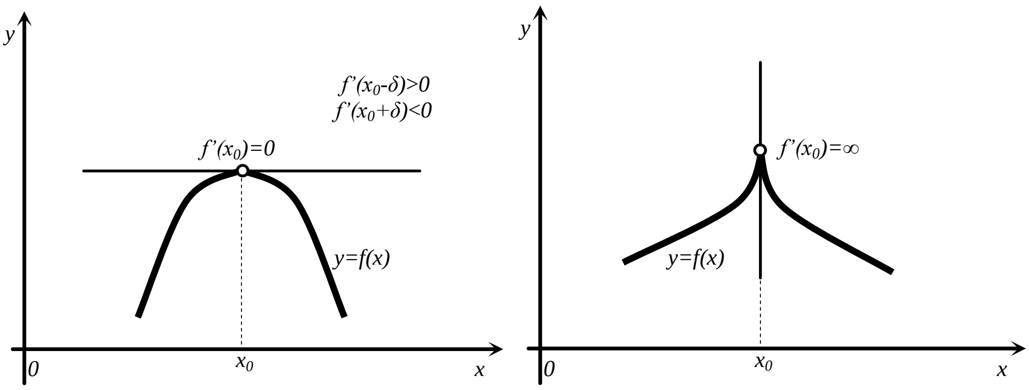
$F(X)$ FUNKSIYA X_0 NUQTADA KAMAYADI. ***17-SHAKL***

a) **b)**



f (x) funksiya x_0 nuqtada *min* ga ega. ***18-shakl***

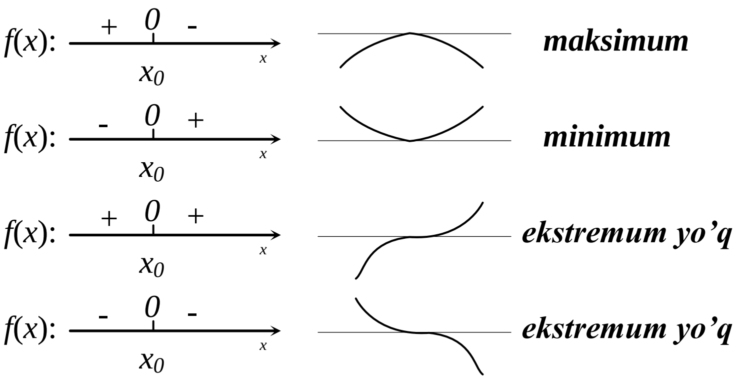
a) **b)**



f (x) funksiya x_0 nuqtada *max* ga ega ***19-shakl***

f'(x) hosilaning x_0 nuqtaning chap va ung tomonidagi ishorasini aniqlab 2-jadvalda ko'rsatilgan hollardan qaysisi o'rinli bo'lishini aniqlash qiyin emas. Jadvaldan ekstremumning birinchi yetarli belgisini olamiz:

Agar f(x) funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, f'(x) hosila x_0 nuqtadan o'tganda ishorasini almashtirsa, («-» dan «+» ga yoki «+» dan «-» ga o'tsa), bu holda f(x) funksiya x_0 nuqtada ekstrimumga (mos ravishda minimumga 18-shakl yoki maksimumga 19-shakl) ega bo'ladi.



2-jadval

x ning qiymati	**16 - shakl**		**17 - shakl**		**18 - shakl**		**19 - shakl**	
	f'**(x)**	f **(x)**	f'**(x)**	f **(x)**	f'**(x)**	f **(x)**	f'**(x)**	f **(x)**
$(x_0-\delta, x_0)$	+	o'suvchi	–	kamayuvchi	–	kamayuvchi	+	o'suvchi
$(x_0+\delta, x)$	+	o'suvchi	–	kamayuvchi	+	o'suvchi	–	kamayuvchi
x_0 nuqtada	0 yoki cheksiz	o'sadi	0 yoki cheksiz	kamayadi	0 yoki cheksiz	*min* ga ega	0 yoki cheksiz	*max* ga ega

misol

$f(x) = 100(x-1)^4(x-2)^3$ funksiya ekstremumga tekshirilsin.

Yechilishi: 1. Hosilani topamiz: $f'(x) = 700(x-1)^3(x-2)^2(x-\frac{11}{7})$

2. $f'(x) = 0$ tenglama ildizlarini topamiz:

$$700(x-1)^3(x-2)^2(x-\frac{11}{7}) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{11}{7}$$

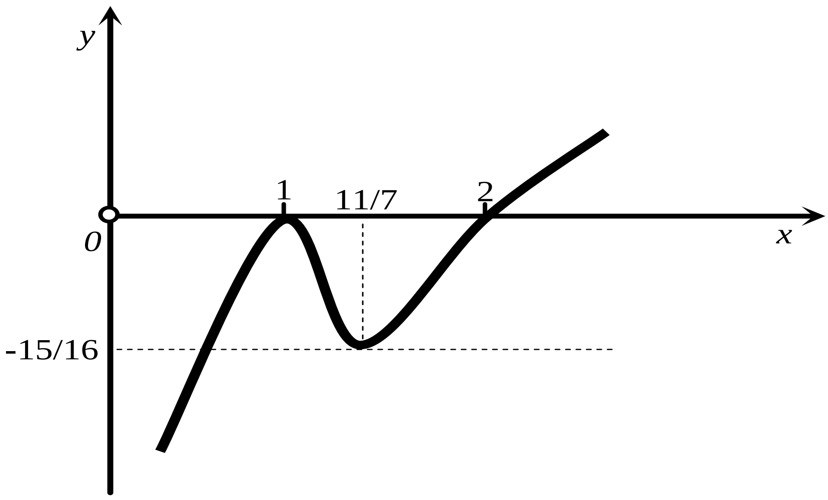
3. Kuyidagi 3- jadvalni tuzamiz:

3-jadval

x ning qiymati	**]-∞,1[**	**1**	**]1,11/7[**	**11/7**	**]11/7,2[**	**2**	**]2,+∞[**
y' ishorasi	+	0	–	0	+	0	+
y qiymati		0		– 15/16		0	
y xarakteri	o'sadi	*Max*	kamayadi	*Min*	o'sadi	ekstrimum. yo'q	o'sadi

Funksiya grafigi ***20-shakl***da tasvirlangan.

Yuqorida bayon qilingan usul (metod)ni, na faqat x_0 nuqta $f(x)$ uchun, balki $f'(x)$ uchun ham kritik nuqta bo'lgan holda qo'llashga to'g'ri keladi. x_0 nuqta $f'(x)$ uchun kritik nuqta bo'lmagan holda, funksiyani ikkinchi hosila ishorasi yordamida ham tekshirish mumkin.



20-shakl

2.4. Funksiyani ikkinchi hosila ishorasi yordamida tekshirish (Ekstremumning ikkinchi yetarli sharti)

Agar $f'(x_0)=0$ va $f''x_0)\neq 0$ bo'lsa $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada:

a) $f''x_0) > 0$ da minimumga ega bo'ladi;

b) $f''x_0) < 0$ da maksimumga ega bo'ladi.

__Isboti__: a) $f''(x_0) > 0$ bo'lsin. Bu holda $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'sadi, $x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta$ tengsizlikdan $f'(x_0 - \delta) < f'(x_0) < f'(x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ kelib chiqadi. Biroq $f'(x_0) = 0$, demak, $f'(x_0 - \delta) < 0 < f'(x_0 + \delta)$.

Bundan, $f'(x)$ hosila x_0 nuqtada ishorasini «–» dan «+» ga almashtirishini ko'rish mumkin. Demak, estremum mavjudligining birinchi yetarli shartiga asosan, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

b) $f''(x_0) < 0$ bo'lsin. Bu holda $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtada kamayadi va $x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta \Rightarrow f'(x_0 - \delta) < f'(x_0) < f'(x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x_0 - \delta) > 0 > f'(x_0 + \delta)$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtada ishorasini «+» dan «–» ga almashtirada. 1-yetarli shartga asosan $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega.

1-misol

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ funksiya ekstremumga tekshirilsin.

__Yechilishi:__ $D(f) =]-\infty;+\infty[$ funksiya $D(f)$ da uzluksiz. Stasionar nuqtalarni topamiz:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $3x^2 - 6x - 9 = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $(x - 3)(x + 1) = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Ikkinchi hosilani hisoblaymiz: $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.

Ikkinchi hosilaning stasionar nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f''(x_1) = f''(-1) = -12 < 0; \qquad f''(3) = 12 > 0.$$

Demak, funksiya $x_1 = -1$ nuqtada maksimumga ega va bu qiymat $f(-1) = 7$ ga teng, $x_2 = 3$ nuqtada minimumga ega va $f(3) = -25$.

2.5. Kesmadagi uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish

$[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz $y = f(x)$ funksiyani qaraylik. Hozircha biz bu funksiyaning faqat lokal maksimum va minimumlarinigina izlash bilan shug'illangan edik, endi esa $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada maksimum va minimum qiymatlarini izlash masalasini qo’yamiz. Ma’lumki funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi maksimumi (minimumi) uning shu kesmadagi eng katta (kichik) qiymati deyiladi va $\sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$ $\left(\inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}\right)$, deb belgilanadi.

Ta’kidlaymizki, $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo’lgan fuknksiya shu kesmada o’zining eng katta (kichik) qiymatini qabul qiladi. Funksiya o’zining bu qiymatlariga kesmaning chetki nuqtalarida ham erishishi mumkin. $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun uning barcha maksimum va minimum qiymatlari, hamda funksiyaning kesmaning chetki nuqtalaridagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari topiladi. Topilgan qiymatlardan eng kattasi (eng kichigi) funksiyaning kesmadagi eng katta (eng kichik) qiymati bo’ladi.

Eng katta (eng kichik) qiymatlarni topish amalda parametrning optimal qiymatini topishda qo’llaniladi.

1-misol

$y = x^4 – 2x^2 + 3$ funksiyaning $[–2; 2]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymati topilsin.

Yechilishi: Kritik nuqtalarni topamiz ularni ekstremumga tekshiramiz:

$y' = 4x^3 – 4x$; $4x(x^2 – 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = – 1$; $x_3 = 1$;

$y''= 12x^2 – 4 = 4(3x^2 – 1)$; $y'(0) = – 4 < 0$; $y''(– 1) = 8 > 0$; $y''(1) = 8 > 0$.

Funksiya $x = 0$ nuqtada maksimumga ega: $y(0) = 3$. Funksiya $x = –1$ va $x = 1$ nuqtalarning har birida minimumga ega: $y(– 1) = y(1) = 2$.

Endi, funksiyaning kesmaning chetki nuqtalaridagi qiymatini topamiz:

$y(–2) = (–2)^4 – 2 (– 2)^2 + 3 = 16 – 8 + 3 = 11$; $y(– 2) = 11$, $y(2) = 11$.

Shunday kilib, eng katta qiymat 11 ga, eng kichik qiymat – 2 ga teng:

$\sup\limits_{[-2,2]} y = 11$; $\inf\limits_{[-2,2]} y = 2.$

2-misol

Hajmi 32 m^3 bo’lgan hovuzning asosi kvadrat shaklida. Hovuzning o’lchamlari shunday aniqlansinki, hovuzning devorlari va tubini qoplashga eng oz material sarflansin.

Yechilishi: Asosning tomonlarini x, hovuzning balandligini u bilan belgilaymiz. U xolda, hovuzning hajmi

$V = x^2 y = 32 \Rightarrow y = 32/x^2$.

Qoplash kerak bo’lgan sirt yuzi $S = x^2 + 4xy$ ga teng, yoki $S = x^2 + \dfrac{128}{x}$.

Bu funksini ekstremumga tekshiramiz:

$$S' = 2x - \frac{128}{x^2} \quad \Rightarrow S'' = 2 + \frac{256}{x^3}, \quad S' = 0 \quad \Rightarrow x = 4, \quad S''(4) > 0.$$

Demak, $x = 4$ minimum nuqta. $x \in]0; +\infty[$ bo’lgani uchun $x = 4$ da funksiya eng kichik qiymatga ega.

Javob: $x = 4$ da $y = 2$; $Inf\, S = 48\ m^2$.

3-misol

O’lchami 5×8 bo’lgan to’g’ri turtburchakli tunuka varaqidan *a* shaklda ko’rsatilgandek burchaklarini kvadrat shaklida kesish bilan eng katta hajmli ochik quticha tayyorlansin.

Yechilishi: x bilan kesiladigan kvadrat tomonini belgilaymiz. Umumiy tomon $2x$ ga kamayadi va qutichaning hajmi $V = x(8 – 2x)(5 – 2x) = 4x^3 – 26x^2 + 40x$ ga teng bo’ladi.

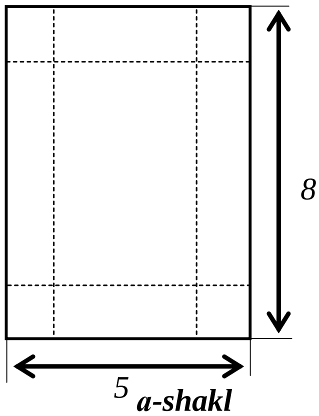
Bundan $0 \le x \le 2{,}5$ bo’lishi kerak (***a-shakl***). Ta’kidlaymizki, chetki nuqtalarda hajm nolga teng bo’ladi. Kritik nuqtalarni topamiz:

$V'= 12x^2 – 52x + 40$; $V' = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $x = 10/3$.

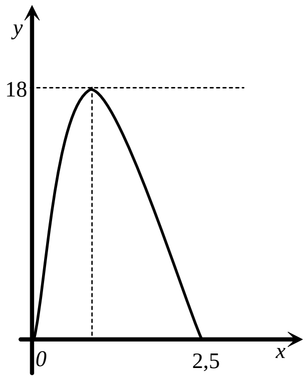
$x = 10/3$ qiymat aniqlanish sohasiga tegishli emas.

$x = 1$ da hajm maksimal:

$V_{max} = 18$ (***b–shakl***).



a-shakl



б-shakl

4-misol

Berilgan sharga ichki chizilgan silindr qanday holda eng katta hajmli bo'ladi?

Yechilishi: R - shar radiusi, r - silindr radiusi, h - silindr balandligi bo'lsin.

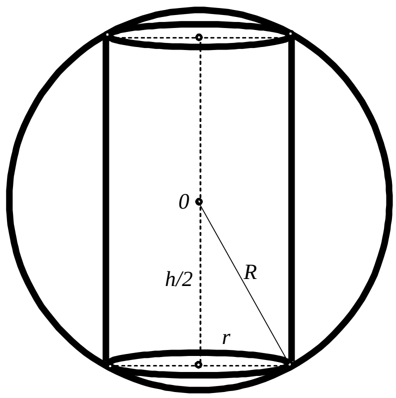
Shakldan $h^2/4 + r^2 = R^2$ bo'ladi.

Bu holda $V = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}; h$ -ning o'zgarish sohasi [0; $2R$] kesma. Chetki qiymatlarda silindr «*ayniydi*», uning hajmi nolga teng bo'ladi. Kritik nuqtalarni topamiz (V = V(h)):

$$V' = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi R^2; \quad V' = 0 \quad \Rightarrow h^2 = \frac{4}{3}R^3 \quad \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}};$$

h ning shu qiymatida hajmning qiymati maksimal bo'ladi.

$$V_{\max} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}R^3 - \pi R^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3.$$



Izoh: O'zgaruvchi deb h - ni emas, balki r ni ham olish mumkin.

Bu holda $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ va $V = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$ ni qarashga to'g'ri keladi va $V = V(r)$ funksiya tekshiriladi.